

Les exercices sont indépendants.
Deux exercices sur trois au libre choix du candidat.

Exercice 1.

Soit n un entier naturel ≥ 2 , et A la matrice carrée d'ordre n , symétrique et tridiagonale suivante :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

a) Pour $u, v \in \mathbb{R}^n$, expliciter (Au, v) .

Rappel de notation : $(u, v) = \sum_{i=1}^n u_i v_i$

b) Montrer que l'application $(u, v) \rightarrow (Au, v)$ définit un produit scalaire sur \mathbb{R}^n . En déduire que la matrice A est inversible.

c) Calculer les valeurs propres λ_k et les vecteurs propres $v_k = (v_{k,1} \ v_{k,2} \ \dots \ v_{k,n})^t$ associés de A , qui sont définis par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} -v_{k,j-1} + 2v_{k,j} - v_{k,j+1} = \lambda_k v_{k,j} & \forall j = 1, \dots, n \\ v_{k,0} = v_{k,n+1} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Indication :

On commence par écrire que $v_{k,j}$ est de la forme : $v_{k,j} = C_1 z_1^j + C_2 z_2^j$

d) On rappelle les normes matricielles suivantes : $\|A\|_2 = \max_{k=1,n} |\lambda_k|$ et $\|A\|_\infty = \max_{i=1,n} (\sum_{j=1}^n |a_{i,j}|)$.

Calculer $\|A\|_2$ et $\|A\|_\infty$.

e) Montrer que $\|A^{-1}\|_2 = O(n^2)$ quand $n \rightarrow \infty$

Exercice 2.

On considère $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite de nombres réels telle que $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ et vérifiant la relation, pour tout entier $n \geq 2$, $a_{n+1} = a_n + \frac{2}{n+1} a_{n-1}$.

1. Montrer que la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ est croissante.

2. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a $a_n \geq 1$ et en déduire que $a_n \rightarrow +\infty$, lorsque $n \rightarrow +\infty$.

3. Montrer aussi que pour tout entier $n \geq 1$, on a $a_n \leq n^2$.

4. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n \geq 1} a_n x^n$.

5. On pose alors, pour tout $x \in]-R, R[$, $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$.

(a) Montrer que S est solution sur $] - R, R[$ de l'équation différentielle

$$(E) \quad (1-x)y' - (1+2x)y = 1+2x.$$

(b) Résoudre l'équation (E).

(c) Exprimer alors S à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 3.

Soient $x = f(u) \cos v$ et $y = g(u) \sin v$. On suppose

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{\partial y}{\partial u} \end{cases}$$

et $f(0) = 1$ et $g(0) = 0$.

1. Calculer les fonctions f et g

2. Soit la fonction F définie par

$$H(u, v) = F(x(u, v), y(u, v)).$$

Exprimer $\Delta H(u, v) = \partial_{uu}^2 H + \partial_{vv}^2 H$ en fonction des dérivées de F .

Concours CASTing 2011

Épreuve de mécanique

Durée 1h30

Sans calculatrice

Le candidat traitera deux exercices parmi les trois proposés dans le sujet. Dans le cas où les trois exercices seraient traités partiellement, seuls deux seront corrigés.

1 Exercice 1 : Mécanique des fluides - dépôt d'un film de liquide protecteur sur un barreau cylindrique.

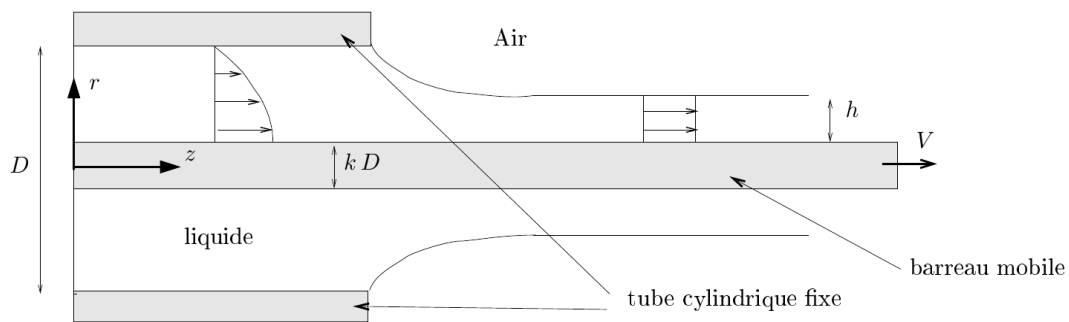


FIGURE 1: Schéma de principe

On considère le procédé décrit figure 1 qui consiste à déposer un liquide protecteur sur un barreau cylindrique. Ce barreau, de diamètre kD ($k < 1$) se déplace horizontalement suivant l'axe z à vitesse constante V au centre d'un tube cylindrique de diamètre intérieur D . On s'intéresse à l'écoulement du fluide entre le barreau et la paroi du tube.

OBJECTIF : estimer le débit de fluide, l'épaisseur de la couche de fluide à la sortie du tube et la force nécessaire pour faire avancer le barreau.

On suppose le fluide newtonien incompressible, de viscosité μ de masse volumique ρ , supposées constantes.

1.1 Démarche et équations générales

- Proposer en quelques lignes une démarche permettant de faire ces estimations.
- Rappeler les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement pour un fluide newtonien incompressible dans le cas général.

1.2 Simplification du problème et résolution

On utilise dans la suite le repère cylindrique dont l'axe z est confondu avec l'axe central du barreau (voir figure 1) et on s'intéresse à **l'écoulement à l'intérieur du tube suffisamment en amont de la sortie pour que cette dernière n'ait pas d'influence**. Pour simplifier les équations générales, on fait les hypothèses suivantes :

- l'écoulement est permanent et invariant suivant l'axe \vec{e}_z ,
- la vitesse dans l'écoulement est parallèle à l'axe \vec{e}_z et respecte une symétrie de révolution.
- les effets de la pesanteur sont négligés et la pression est uniforme (indépendante des coordonnées r , θ et z).

Moyennant ces hypothèses, la vitesse \vec{v} et la pression p peuvent s'écrire dans le repère cylindrique :

$$\vec{v}(r, \theta, z, t) = v_z(r) \vec{e}_z, \quad p(r, \theta, z, t) = p_0$$

- En introduisant ces hypothèses, simplifier les équations de conservation générales et établir l'équation que doit vérifier la composante axiale de la vitesse $v_z(r)$ (on pourra s'aider du formulaire donnée en annexe).
- Préciser les conditions aux limites que doit vérifier $v_z(r)$.
- En déduire l'expression suivante :

$$v_z(r) = V \frac{\ln(2r/D)}{\ln k}$$

1.3 Exploitation des résultats

- Calculer le débit de fluide au travers d'une section (indication : intégration par partie).
- Suffisamment loin après la sortie du tube, on suppose que le film de liquide est d'épaisseur h constante et se déplace à vitesse V du barreau. Calculer l'épaisseur h en supposant $h \ll kD$.
- En reprenant l'expression de la vitesse donnée à la question 1.3-c), calculer les composantes du tenseur des contraintes dans le fluide en fonction de k , p_0 , V , μ et r entre le tube et le barreau.
- Calculer la contrainte de cisaillement (orientée suivant z) exercée par le fluide sur le barreau et en déduire la force par unité de longueur à exercer sur le barreau pour assurer une vitesse de déplacement V .

2 Exercice 2 : Dynamique du solide

On considère le dispositif représenté sur la figure 2. Ce dernier est constitué d'un bâti (0) supposé lié au référentiel galiléen $\mathcal{R}_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ ainsi que d'un engrenage (solide (2)) qui roule sans glisser sur le bâti au point J . Soit $\mathcal{R}_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_0, \vec{z}_1)$ le repère, tel que le point C (appartenant à l'axe de rotation de (2)) soit sur l'axe (O, \vec{z}_1) , et on pose $\alpha = (\vec{z}_0, \vec{z}_1)$. Soit $\mathcal{R}_2(C, \vec{x}_2, \vec{y}_0, \vec{z}_2)$ le repère lié à (2), et on pose $\beta = (\vec{z}_1, \vec{z}_2)$. Enfin, on suppose que $\beta = 0$ lorsque $\alpha = 0$.

Le problème est considéré comme étant plan. On désigne par $\vec{g} = g \vec{z}_0$ l'accélération de la pesanteur. Le centre de gravité du solide (2) est supposé localisé au point C , et sa masse est notée m . Le moment d'inertie de (2) selon l'axe (C, \vec{y}_0) est noté I . Le rayon de la partie cylindrique de (2) roulant sur (0) est noté r , tandis que celui de la portée dans laquelle a lieu le mouvement est noté R . Enfin, on note f le coefficient de frottement au contact entre (0) et (2).

En écartant l'engrenage de sa position d'équilibre, on obtient un mouvement oscillatoire. L'objectif est d'étudier ce mouvement.

Note : Tous les paramètres géométriques, ainsi que la masse m de (2) sont supposés connus.

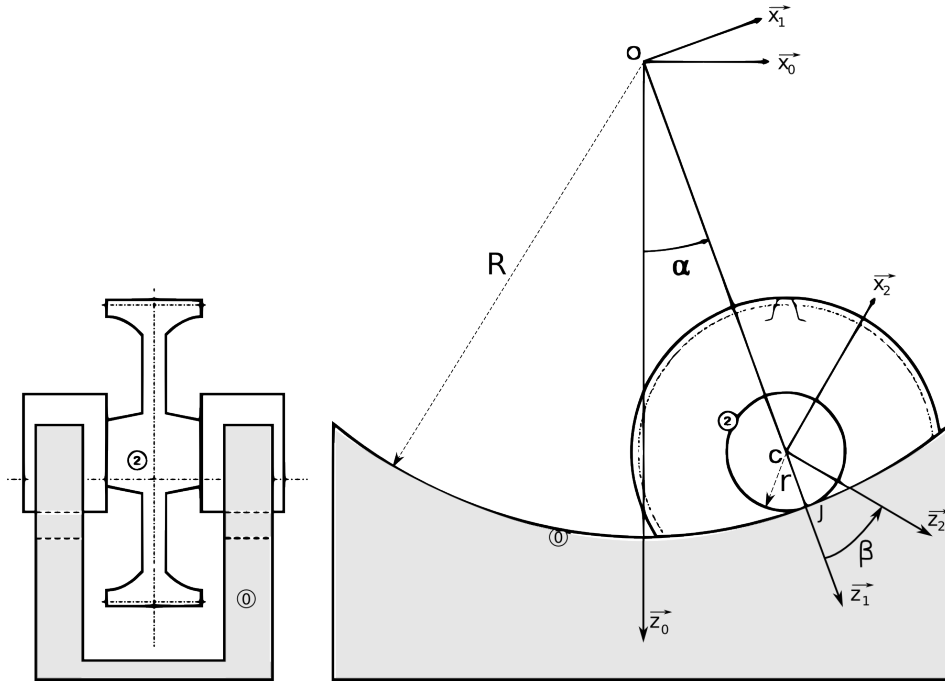


FIGURE 2: Dispositif expérimental

Questions Préliminaires :

1. Quelle est l'unité de I ? Expliquer sa signification physique.
2. Les paramètres cinématiques introduits pour décrire le mouvement du système sont-ils indépendants? (justifier)

Cinématique :

3. Calculer la vitesse du point C du solide (2) dans son mouvement par rapport à \mathcal{R}_0 : $\vec{V}(C, 2/\mathcal{R}_0)$
4. Calculer la vitesse du point J du solide (2) dans son mouvement par rapport à \mathcal{R}_0 : $\vec{V}(J, 2/\mathcal{R}_0)$
5. Quelle est la relation liant $\alpha(t)$ à $\beta(t)$?
6. Calculer l'accélération du point C : $\vec{\Gamma}(C, 2/\mathcal{R}_0)$;

Schématisation des efforts - mise en équation du problème :

On cherche à déterminer l'équation du mouvement de (2) par application du principe fondamental de la dynamique.

7. Caractériser le torseur des actions transmissibles par la liaison entre (0) et (2)
8. Faire le bilan des équations et des inconnues du problème
9. Écrire **sans les développer** les équations du PFD appliqué à (2).
10. Sachant que l'on s'intéresse à l'équation du mouvement, quelle(s) équation(s) du PFD choisissez-vous de développer? (justifier)

Équations de la mécanique :

11. Calculer le moment dynamique de (2) au point C : $\vec{\delta}(C, 2/\mathcal{R}_0)$;

12. En déduire le moment dynamique de (2) au point $J : \vec{\delta}(J, 2/\mathcal{R}_0)$;
13. En déduire l'équation différentielle régissant le mouvement oscillant de (2) ;
14. En supposant que α reste petit au cours du mouvement, déterminer l'équation du mouvement de (2) ;
En déduire la période des oscillations.
15. On mesure expérimentalement la période T des oscillations de (2) : quelle grandeur peut-on en déduire ?

Équations de Lagrange :

16. Exprimer l'énergie cinétique de (2) ;
17. Expliquer **sans développer les équations** comment obtenir l'équation du mouvement à partir des équations de Lagrange ;
18. Expliquer **sans développer les équations** comment obtenir l'expression de l'effort normal de (0) sur (2) à partir des équations de Lagrange ;

3 Exercice 3 : Résistance des matériaux

On considère la poutre console de longueur L présentée sur la figure 3. Cette dernière est encadrée en $x = 0$, soumise à un effort réparti $\vec{f} = -f\vec{y}$ ainsi qu'un effort ponctuel à son extrémité $\vec{F} = F\vec{x}$. Le matériau constituant la poutre est supposé élastique-linéaire de module d'Young E et de coefficient de Poisson ν . De plus, le moment quadratique de la section de la poutre selon la direction \vec{z} est noté I .

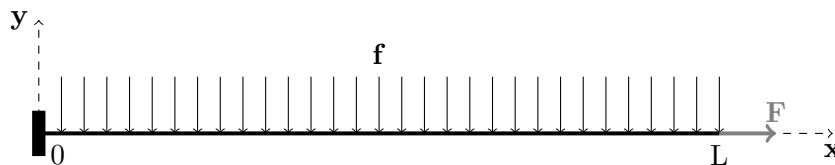


FIGURE 3: Poutre console

Questions préliminaires

1. Définir le tenseur de cohésion et expliciter ses éléments de réduction ;
2. Quelles sont les composantes non nulles de ce tenseur (justifier) ?
3. Donner les équations locales que vérifient ces composantes ;
4. Donner les lois de comportement liant les composantes du tenseur de cohésion aux champs cinématiques ;
5. Préciser les conditions limites (efforts et déplacements) ;
6. Quelles sont les unités de E et ν ? On précisera la plage d'évolution de ν ;
7. Donner l'unité de I ;

Résolution du problème

8. On choisit de résoudre le problème en considérant les sollicitations \vec{f} et \vec{F} séparément. Justifier cette démarche.
9. Déterminer l'évolution de l'effort normal sur la poutre en fonction de l'abscisse x . Tracer le diagramme correspondant.

10. Déterminer l'évolution de l'effort tranchant et du moment de flexion en fonction de l'abscisse x . Tracer les diagrammes correspondants.
11. Déterminer l'expression du déplacement du point d'abscisse $x = L$.

Étude des résultats

12. Parmi les sections présentées sur la figure 4, laquelle minimisera le déplacement à l'extrémité? (justifier votre réponse)
13. Représenter graphiquement l'évolution de la contrainte normale σ_{xx} sur la section B de la poutre;
14. Quelle serait cette évolution dans le cas d'une poutre circulaire?
15. La poutre est réalisée en béton. Le module d'Young du béton est très faible en traction. Que pensez-vous de l'influence de \vec{F} sur la durabilité de la structure?

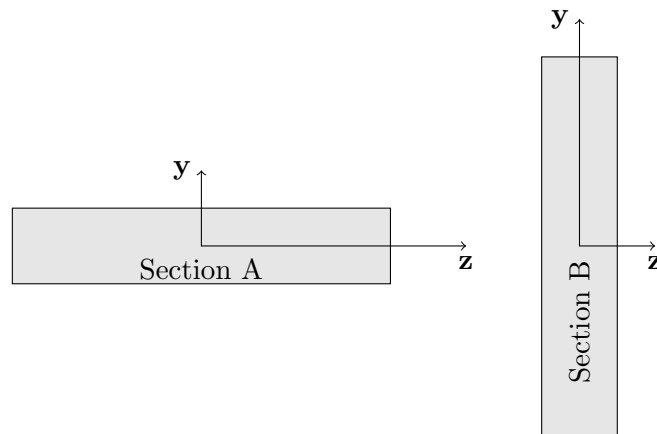


FIGURE 4: Deux sections.

Annexe : formulaire pour les coordonnées sphériques

Gradient d'un champ scalaire $p(r, \theta, z)$:

$$\mathbf{grad}p = \partial_r p \vec{e}_r + \frac{1}{r} \partial_\theta p \vec{e}_\theta + \partial_z p \vec{e}_z$$

Gradient, divergence et laplacien d'un champ vectoriel $\vec{v} = v_r(r, \theta, z) \vec{e}_r + v_\theta(r, \theta, z) \vec{e}_\theta + v_z(r, \theta, z) \vec{e}_z$:

$$\begin{aligned}
 [(\mathbf{grad} \vec{v})_{ij}] &= \begin{bmatrix} \partial_r v_r & \frac{1}{r} (\partial_\theta v_r - v_\theta) & \partial_z v_r \\ \partial_r v_\theta & \frac{1}{r} (\partial_\theta v_\theta + v_r) & \partial_z v_\theta \\ \partial_r v_z & \frac{1}{r} \partial_\theta v_z & \partial_z v_z \end{bmatrix}_{\{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z\}} \\
 \operatorname{div} \vec{v} &= \partial_r v_r + \frac{1}{r} (\partial_\theta v_\theta + v_r) + \partial_z v_z \\
 \Delta \vec{v} &= \left(\partial_{rr} v_r + \frac{1}{r^2} (\partial_{\theta\theta} v_r - 2 \partial_\theta v_\theta - v_r) + \frac{1}{r} \partial_r v_r + \partial_{zz} v_r \right) \vec{e}_r \\
 &\quad + \left(\partial_{rr} v_\theta + \frac{1}{r^2} (\partial_{\theta\theta} v_\theta + 2 \partial_\theta v_r - v_\theta) + \frac{1}{r} \partial_r v_\theta + \partial_{zz} v_\theta \right) \vec{e}_\theta \\
 &\quad + \left(\partial_{rr} v_z + \frac{1}{r^2} \partial_{\theta\theta} v_z + \frac{1}{r} \partial_r v_z + \partial_{zz} v_z \right) \vec{e}_z \\
 &= \left(\partial_r \left(\frac{1}{r} \partial_r (r v_r) \right) + \frac{1}{r^2} (\partial_{\theta\theta} v_r - 2 \partial_\theta v_\theta) + \partial_{zz} v_r \right) \vec{e}_r \\
 &\quad + \left(\partial_r \left(\frac{1}{r} \partial_r (r v_\theta) \right) + \frac{1}{r^2} (\partial_{\theta\theta} v_\theta + 2 \partial_\theta v_r) + \partial_{zz} v_\theta \right) \vec{e}_\theta \\
 &\quad + \left(\frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r v_z) + \frac{1}{r^2} \partial_{\theta\theta} v_z + \partial_{zz} v_z \right) \vec{e}_z
 \end{aligned}$$

Divergence d'un champ tensoriel du second ordre symétrique σ :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{div} \sigma &= \left(\partial_r \sigma_{rr} + \frac{1}{r} (\partial_\theta \sigma_{r\theta} + \sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) + \partial_z \sigma_{rz} \right) \vec{e}_r \\
 &\quad + \left(\partial_r \sigma_{r\theta} + \frac{1}{r} (\partial_\theta \sigma_{\theta\theta} + 2 \sigma_{r\theta}) + \partial_z \sigma_{\theta z} \right) \vec{e}_\theta \\
 &\quad + \left(\partial_r \sigma_{rz} + \frac{1}{r} (\partial_\theta \sigma_{\theta z} + \sigma_{rz}) + \partial_z \sigma_{zz} \right) \vec{e}_z
 \end{aligned}$$

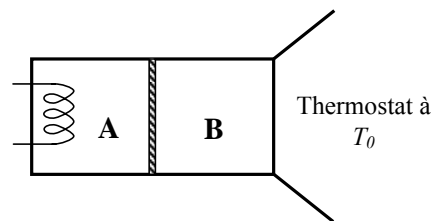
Element de surface d'une section : $r \, dr \, d\theta$

●●●● **FIN** ●●●●

II. DEUXIEME PARTIE : EXERCICES

II. 1. Exercice 1 : Echanges thermiques dans un cylindre fermé

Un cylindre fermé horizontal est divisé en deux compartiments A et B de même volume V_0 par un piston coulissant librement sans frottement. A et B contiennent chacun une mole de gaz parfait monoatomique à la pression P_0 et à la température T_0 . Le piston, la surface latérale du cylindre et la surface de base S_A du compartiment A sont adiabatiques. La surface de base S_B du compartiment B est diatherme. Le compartiment A est porté très lentement à la température T_1 à l'aide d'une résistance chauffante, le compartiment B reste à T_0 par contact thermique avec un thermostat.



1. Exprimer les volumes V_A , V_B et la pression finale d'équilibre P_f en fonction de T_1 , T_0 et V_0 , correspondant à la position d'équilibre du piston.
2. Quelle est la variation d'énergie interne du gaz à l'intérieur de A et B ? En déduire la variation d'énergie interne du système (A+B).
3. Quelle est la nature de la transformation subie par le gaz en B ? Quel est le travail échangé par B avec A ? En déduire la quantité de chaleur Q_1 reçue par le thermostat.
4. En considérant le système A, trouver la quantité de chaleur Q_2 fournie par la résistance chauffante.
5. Applications numériques : $T_0 = 93 \text{ K}$; $T_1 = 340 \text{ K}$; $V_0 = 10^{-2} \text{ m}^3$; $R = 8,32 \text{ (SI)}$. Déterminer numériquement : V_A , V_B , P_f , Q_1 et Q_2 .
6. On suppose maintenant que la surface de base S_B du compartiment B est adiabatique également et qu'une résistance chauffante placée en B apporte une quantité de chaleur Q_3 de façon à ce que le piston reprenne très lentement sa position d'équilibre initiale. Quelle est la nature de la transformation subie par le gaz du compartiment A ? Quelle est la pression finale d'équilibre P_E ? Trouver les températures T_A et T_B dans chacun des compartiments ? Déterminer numériquement P_E , T_A et T_B . On donne $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{5}{3}$.

II. 2. Exercice 2 : Modèle de Drude pour les métaux - Réflectivité

Dans ce problème, on se propose de calculer par un modèle simple la fonction diélectrique d'un métal quasi-parfait et d'en déduire son aspect visuel.

On considère un métal (conducteur quasi-parfait) dans lequel les électrons de conduction sont quasi-libres. On supposera dans la suite que le déplacement des électrons reste confiné dans un volume tel que les quantités auxquelles on s'intéresse (densité électronique, champ électrique, polarisation, déplacement...) ne dépendent pas de la position de l'électron dans ce volume. La charge d'un électron est $-e$, sa masse est m_e . Il est soumis à des processus de

collisions (avec les ions, les autres électrons, les défauts cristallins,...) caractérisés par un coefficient Γ de frottement visqueux (= taux de collision = inverse du temps moyen entre deux collisions). Il y a n_e électrons libres par unité de volume et on suppose qu'ils sont indépendants. On étudie l'interaction d'une onde électromagnétique avec ce métal.

Le champ total vu par un électron est de la forme : $\vec{E}(\vec{r}, t) = E_0 e^{-i\omega t} \vec{e}_x$.

1. Etablir le bilan des forces appliquées à un électron libre du métal. En déduire l'équation différentielle à laquelle obéit son déplacement $x(t)$ par rapport à sa position d'équilibre sous l'effet de l'onde.
2. Déterminer la solution de cette équation en régime permanent.
3. En déduire le moment dipolaire associé à ce déplacement électronique, puis le vecteur polarisation $\vec{P}(\omega)$. Pour cela, on ne retiendra que le terme dipolaire électrique : c'est *l'approximation dipolaire*.
4. Etablir alors l'expression de la susceptibilité diélectrique relative du milieu, $\chi(\omega)$. On introduira $\omega_p = \sqrt{\frac{n_e e^2}{m_e \epsilon_0}}$, la *pulsation de plasmon de volume* du métal.
5. En écrivant la fonction diélectrique (permittivité) relative $\epsilon = 1 + \chi$ sous la forme : $\epsilon(\omega) = \epsilon_1(\omega) + i\epsilon_2(\omega)$, explicitez ses parties réelle $\epsilon_1(\omega)$ et imaginaire $\epsilon_2(\omega)$.
6. Dans le cas où la fréquence des collisions est faible ($\Gamma \ll \omega$), ce qui est en général vrai dans le domaine optique, montrer que ces expressions se réduisent à :

$$\epsilon_1(\omega) \approx 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad \epsilon_2(\omega) \approx \frac{\omega_p^2 \Gamma}{\omega^3}$$

7. Rappeler le lien entre ϵ et l'indice optique complexe \tilde{n} . En écrivant ce dernier sous la forme $\tilde{n} = n + i\kappa$, décrire qualitativement la propagation de l'onde dans le métal lorsque $\omega \gg \omega_p$, puis lorsque $\omega = \omega_p$.
8. On rappelle l'expression du coefficient de réflexion en intensité R d'une onde à l'interface d'un milieu 1 d'indice \tilde{n}_1 et d'un milieu 2 d'indice \tilde{n}_2 , en incidence normale :

$$R = \left| \frac{\tilde{n}_1 - \tilde{n}_2}{\tilde{n}_1 + \tilde{n}_2} \right|^2.$$

9. On envoie une onde à travers l'air sur une surface métallique. Que vaut R dans les deux cas de la question précédente? On prendra $n=1$ pour l'air.
10. On néglige désormais l'influence des collisions dans la réponse optique. Etablir (sans remonter aux équations de Maxwell !) l'équation de dispersion liant la pulsation ω et le vecteur d'onde dans le métal, k . Tracer la courbe de dispersion $\omega(k)$ ainsi que celle d'une onde dans le vide.
11. On envoie sur le métal (à travers l'air) une onde incidente de pulsation $\omega < \omega_p$. Que devient l'indice optique du métal dans cette gamme spectrale? Calculer alors la valeur du coefficient de réflexion en intensité. Conclusion?
12. Application numérique : déterminez la valeur de la densité d'électrons de conduction n_e pour l'argent massif, puis celle de l'énergie de plasmon de volume théorique de l'argent $\hbar\omega_p$ en eV, sachant que :
 - chaque atome d'argent contribue par un seul électron de conduction (structure de l'atome : [Kr] 4d¹⁰ 5s¹) ;
 - la masse volumique de l'argent massif est de 10490 kg m⁻³ ;
 - la masse molaire de l'argent (masse atomique) vaut 107,868 g mol⁻¹ ;
 - la masse effective d'un électron de conduction dans le solide vaut : $m_e = 9,4 \times 10^{-31}$ kg.

Rappel : nombre d'Avogadro $\mathcal{N}_A=6,02\times 10^{23}$, $\varepsilon_0=8,84\times 10^{-12}$ (S.I.), $e=1,6\times 10^{-19}$ C et $\hbar=1,05\times 10^{-34}$ J s⁻¹.

13. Sachant que le domaine visible s'étend de 450 à 750 nm pour la longueur d'onde (dans le vide), expliquer en utilisant les résultats précédents le comportement de la lumière visible lorsqu'on l'envoie sur une surface argentée.

II. 3. Exercice 3 : Interférométrie avec une lame à faces parallèles

On considère un milieu incident d'indice de réfraction n_0 (qu'on supposera être de l'air ($n_0 = 1$) pour les applications numériques) et une lame de verre à faces parallèles et d'épaisseur $e_s = 3$ mm et d'indice de réfraction $n_s = 1,45$.

1. Cas d'une source monochromatique

La lame est éclairée avec un angle d'incidence i , par une source étendue, monochromatique de longueur d'onde $\lambda_0 = 600$ nm, de polarisation transverse électrique (TE).

- a. Ecrire les amplitudes de l'onde A_1 réfléchiée par la première face et de l'onde A_2 réfléchiée par la deuxième face en fonction de A_0 l'amplitude de l'onde incidente. Puis donner les amplitudes des réflexions multiples à l'intérieur de la lame.

On donne les expressions des coefficients de réflexion et de transmission de Fresnel, en polarisation TE, sur une interface entre deux milieux d'indice de réfraction n_1 et n_2 (i_1 et i_2 étant respectivement les angles d'incidence et de réfraction) :

$$r = \frac{n_1 \cos i_1 - n_2 \cos i_2}{n_1 \cos i_1 + n_2 \cos i_2} \quad \text{et} \quad t = \frac{2n_1 \cos i_1}{n_1 \cos i_1 + n_2 \cos i_2}$$

En considérant les coefficients de réflexion équivalents à chaque réflexion en intensité et en incidence normale, en déduire que les phénomènes de réflexion multiples peuvent être ici négligés. Pour la suite, on supposera cette hypothèse vérifiée.

- b. Exprimer la différence de marche entre les ondes A_1 et A_2 en fonction de e_s , de i et de n_s . Déterminer l'intensité résultante de la superposition des deux premières ondes réfléchies. Dans cette expression, les phénomènes de réflexions multiples étant négligés, on négligera devant les autres termes les termes en R^3 (R étant le coefficient de réflexion en intensité de la première interface).

Donner la localisation et la forme de la figure d'interférence.

- c. Exprimer l'ordre d'interférence et calculer l'ordre d'interférence au centre ($i = 0^\circ$). Quel est l'ordre d'interférence et le rayon angulaire i_1 du premier anneau brillant ?

2. Cas d'une source polychromatique

La source est une lampe polychromatique. On pourra considérer le nombre d'onde $\sigma = 1/\lambda$. Sa réponse spectrale est donnée sur la Figure 1. On considère que la source émet tous les nombres d'onde compris entre $\sigma_0 - \Delta\sigma_0/2$ et $\sigma_0 + \Delta\sigma_0/2$, chaque radiation élémentaire de largeur $d\sigma$ donnant une intensité $I_0 d\sigma / \Delta\sigma_0$.

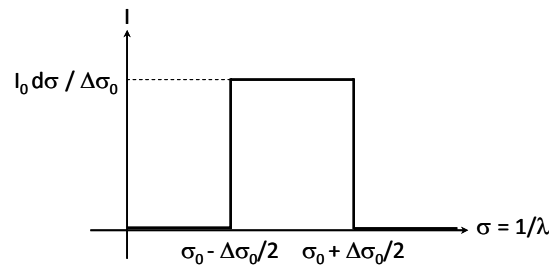


Figure 1 : Réponse spectrale de la source lumineuse.

- a. Définir la cohérence temporelle. Dans le cas de l'exercice, précisez si les radiations de chaque longueur d'onde sont cohérentes ou non entre elles et en déduire si on doit sommer les intensités ou les amplitudes dues à chaque longueur d'onde pour obtenir l'intensité globale.
- b. Déterminer l'intensité lumineuse résultant de l'interférence entre les deux ondes réfléchies par la première et la seconde face de la lame en la mettant sous la forme :

$$I = I'(1 + V \cos \varphi),$$
 où on donnera l'expression de I' , de φ et de la visibilité V qui sont des fonctions des variables du problème.
- c. Si $\lambda_0 = 600 \text{ nm}$, quelle la largeur spectrale $\Delta\lambda_0$ conduit à une visibilité des franges nulle.

3. Couche anti-reflet.

On souhaite utiliser la lame de verre comme verre de lunette. Pour qu'elle ait la propriété d'être anti-reflet, on dépose sur cette lame une couche mince d'épaisseur e_1 et d'indice de réfraction n_1 . On considère pour la suite que l'angle d'incidence est $i=0^\circ$ et que l'onde est monochromatique et que sa polarisation est transverse électrique (TE). Le système optique considéré est illustré sur la Figure 2.

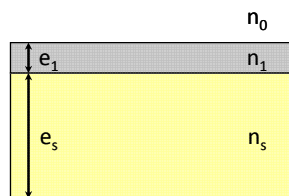


Figure 2 : Schéma du système optique considéré.

Dans ces conditions et si la lame de verre est suffisamment épaisse, on peut montrer que le coefficient de réflexion en intensité du système optique est donné

par : $R = \frac{n_0 - Y_0}{n_0 + Y_0}$ où Y_0 est appelé l'admittance complexe du système :

$$Y_0 = \frac{-in_1 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} n_1 e_1\right) + n_s \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} n_1 e_1\right)}{\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} n_1 e_1\right) - i \frac{n_s}{n_1} \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} n_1 e_1\right)}$$

- a. Donner les conditions sur l'indice de réfraction de la couche et sur son épaisseur pour qu'elle soit anti-reflet, c'est-à-dire qu'elle ne réfléchisse pas la lumière.
- b. Application numérique : Calculer la valeur de l'indice avec les valeurs numériques du problème.